TÂN PHƯƠNG PHÁP A*C ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

(New A*C Method to solve quadratic equations)

(Nghi H Nguyen, 02-06-2015)

Giải phương trình bậc hai là một đề tài căn bản trong chương trình Toán trung học tại Hoa Kỳ. Tuy đề tài này đã được dậy học sinh từ hàng trăm năm nay, nhưng nhiều phương pháp giải chưa được hoàn thiện. Hiện nay, chương trình toán Lớp 10 và Lớp 11 tại Hoa Kỳ đang dậy một số phương pháp giải căn bản. Dạng căn bản của phương trình bậc hai là: $ax^2 + bx + c = 0$.

Sau đây là hai phương pháp phổ cập nhất.

1. **Công thức phương trình bậc hai (Quadratic Formula).**

Tất cả các học sinh trung học đều phải học thuộc lòng công thức này. Hai nghiệm số (real roots) của phương trình được cho do công thức:

$x = -b/2a \pm (\sqrt{b^2 - 4ac})/2a$. (1)

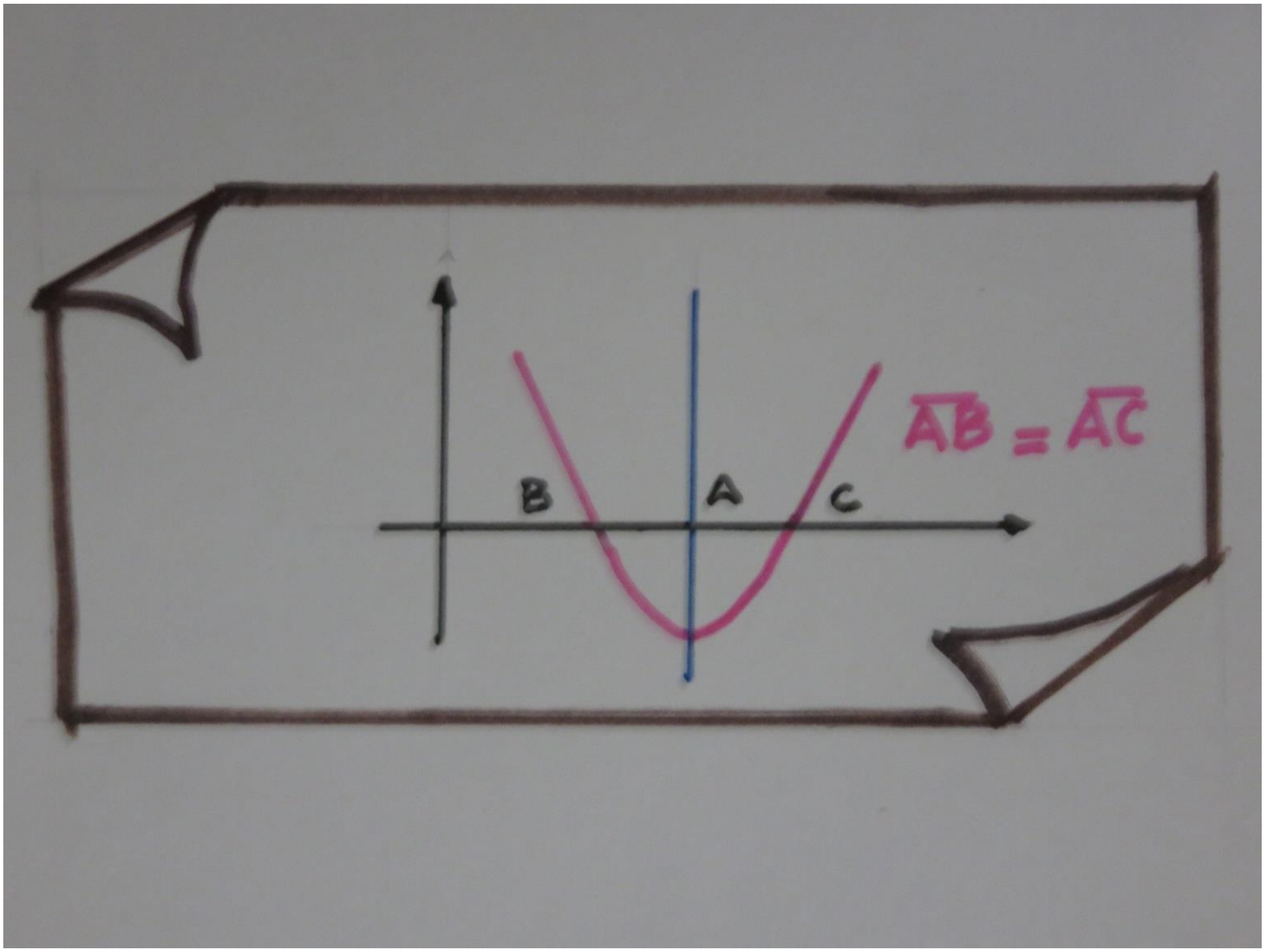
Công thức này có lợi điểm là nó giải được tất cả mọi phương trình bậc hai, kể cả các phương trình có nghiệm số phức tạp (complex roots). Cách giải cũng đơn dản và mau lẹ, nhất là khi xử dụng máy tính (calculators).
Tuy nhiên, nó cũng có nhiều điểm bất lợi:

- Học sinh không giải được nếu không thuộc lòng công thức. Khi trắc nghiệm/ khảo hạch thường không được sài máy tính.
- Máy tính sẽ cho đáp số là số lẻ (decimals), trong khi đáp số của nhiều phương trình bậc hai là phân số (fractions).
  Thí dụ: hai nghiệm số của phương trình ($8x^2 - 22x – 13 = 0$) là: -1/2 và 13/4.
- Mục đích của sự học toán khỏng chỉ là tìm nghiệm số. Học sinh học toán để học cách suy luận và diễn dịch hợp lý. Chương trình toán trung học muốn học sinh học nhiều cách giải khác nhau để cải tiến khả năng toán học. Vì vậy, nhiều phương trình bậc hai đã được cố ý soạn thảo để học sinh bắt buộc phải xử dụng các phương pháp giải, khác với công thức bậc hai.

Công thức bậc hai cải tiến có hai giao điểm với trục Ox.
(New and improved quadratic formula in intercept form - by Nghi H Nguyen).

Đồ thị của phương trình bậc hai là một Parabol. Parabol này có thể cắt trục tọa độ Ox tại một điểm (nghiệm số kép), hai điểm (2 nghiệm số đơn, 2 real roots), hoặc không cắt trục Ox (nghiệm số phức tạp).
Công thức cải tiến của phương trình bậc hai, theo tác giả Nghi H Nguyen là:

$x = -b/2a \pm d/2a$ (2) (với **$d^2 = b^2 - 4ac$**) (3).



Trong công thức này, giả thử trục Ox cắt parabola tại 2 điểm B và C và trục đối xứng của parabola cắt trục Ox tại A thì:

- **(-b/2a)** là hoành độ (x- coordinate) của trục đối xứng của Parabola (điểm A)
- **(± d/2a)** là hai khoảng cách bằng nhau (equal distances) từ trục parabola (A) tới hai điểm B và C, với AB = AC.
- Con số **d**, được tính toán từ hệ thức (**$d^2 = b^2 - 4a*c$**) có thể là:

  - Zero, ta có nghiệm số kép (-b/2a); đường parabola tiếp súc với trục Ox tại A.

  - Số tròn (whole number), số lẻ (decimal), hoăc căn số (radical); ta có 2 nghiệm số (real roots). Trục Ox cắt parabola tại 2 giao điểm B và C (AB = AC).

  - Số ảo (imaginary): trục Ox không cắt parabola.

Công thức cải tiến này dản đơn và dễ nhớ hơn công thức hiện hữu vì lý do học sinh sẽ liên hệ công thức với 2 giao điểm của trục Ox và parabola. Hơn nữa, số lượng **(-d/2a**) có ý nghĩa về khoảng cách (distance) hơn là số lượng ($\sqrt{b^2 - 4ac}$). Ngoài ra, công thức cải tiến cho phép dễ dàng chuyển đổi hàm số bậc hai từ dạng căn bản (standard form) qua dạng giao điểm (intercept form).

Thí dụ 1: Chuyển đổi hàm số bậc hai từ dạng căn bản $f(x) = ax^2 + bx + c$ qua dạng giao điểm.

$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x – x1)(x – x2)$, với x1 và x2 là 2 nghiệm số của phương trình.
$f(x) = a(x + b/2a + d/2a)(x + b/2a – d/2a)$, với $d^2 = b^2 - 4ac$.
Đây là dạng giao điểm (intercept form) của hàm số f(x).

Cách giải phương trình bậc hai dùng Công Thức Cải Tiến

Trước hết, tìm **d** theo hệ thức (**3**). Sau đó tìm 2 nghiệm số theo Công Thức Cải Tiến (**2**).

Thí dụ 2. Giải: $4x^2 - 12x + 9 – 0$.
Bài giải. Trước hết tìm **d** qua hệ thức (3)
$d^2 = b^2 - 4ac = 144 – 144 – 0 \rightarrow d = 0$.
Phương trình có nghiệm số kép tại điểm hoành độ x = -b/2a = 12/8 = 3/2.

Thí dụ 3. Giải: $2x^2 - 3x + 7 = 0$.
Bài giải. $d^2 = 9 – 56 = -47 < 0 \rightarrow$ d là số ảo. Phương trình không có nghiệm số.

Thí dụ 4. Giải: $3x^2 + 16x – 12 = 0$.
Bài giải. $d^2 = 256 + 144 = 400 = 20^2 \rightarrow d = \pm 20$.
x1 = -16/6 + 20/6 = 4/6 = 2/3.
x2 = -16/6 – 20/6 = -36/6 = -6.

Thí dụ 5. Giải: $2x^2 + 12x + 17 = 0$.
Bài giải. $d^2 = 144 – 136 = 8 \rightarrow d = \pm 2.83$
x1 = -12/4 + 2.83/4 = -9.17/4 = -2.29
x2 = -12/4 – 2.83/4 = -14.84/4 = -3.70

2. **Phương pháp phân tích thành thừa số xử dụng tích số a*c.**
   (The factoring a*c Method)

Sơ tả phương pháp hiện hữu để giải phương trình bậc hai, loại có thể phân tích ra thừa số:
Biến đổi tam thức (trinomial) $ax^2 + bx + c$ thành 2 nhị thức (binomial) để giải ra hai nghiệm số x.
Thay thế số hạng (term) (bx) trong phương trình bởi 2 số hạng (b1x) và (b2x) theo hai điều kiện:

1) Tích số: b1*b2 = a*c
2) Tổng số: (b1 + b2) = b.

Thí dụ 6. Giải: $x^2 - 11x - 102 = 0$ (a = 1)

Bài giải. Tìm 2 số b1 và b2 mà tích số là b1*b2 = a*c = c = -102 và tổng số là (b1 + b2) = -11. Tìm bằng cách liệt kê (compose) các cập thừa số (factor pairs) của a*c = c = - 102. Ta có: (1, 102)(2, 51)(3, 34)(6, 17) OK. Từ đó, tìm ra: b1 = 6 và b2 = -17.
Tiếp theo, thay thế trong phương trình biểu số (-11x) bằng hai biểu số (6x) và (-17x), rồi phân tích thành thừa số.
$x^2 - 11x - 102 = x^2 + 6x - 17x - 102 = x(x + 6) - 17(x + 6) = (x + 6)(x - 17) = 0$
Tiếp, giải hai nhị thức ra x:
$(x + 6) = 0 \rightarrow x = -6$
$(x - 17) = 0 \rightarrow x = 17$.

Chú thích quan trọng 1 (Important Remark). Hai con số (b1 = 6) và (b2 = -17), thật ra, là 2 nghiệm số đã đổi dấu của phương trình. Ta sẽ có ngay 2 nghiệm số (b1 = -6) và (b2 = 17) nếu thay đổi điều kiện 2 ra là (b1 + b2) = -b.
Như vậy, việc tiếp tục phân tích dài giòng ra 2 thừa số và giải hai nhị thức là **không cần thiết**.

Thí dụ 7. Giải: $15x^2 - 53x + 16 = 0$ (1) (a*c = 15*16 = 240))

Bài giải. Tìm 2 số có (b1*b2) = a*c = 15*16 = 240, và (b1 + b2) = -53. Liệt kê các cập căn số của 240: (1, 240)(2, 120)(3, 40)(4, 60)(5, 48), OK. Tìm ra: b1 = -5 và b2 = -48.
Tiếp, thay thế trong phương trình số hạng (-53x) bằng hai số hạng (-5x) và (-48x), rồi phân tích thành thừa số:
$15x^2 - 53x + 16 = 15x^2 - 5x - 48x + 16 = 5x(3x - 1) - 16(3x - 1) = (3x - 1)(5x - 16) = 0$.
Tiếp, giải hai nhị thức:
$(3x - 1) = 0 \rightarrow x = 1/3$
$(5x - 16) = 0 \rightarrow x = 16/5$.

Chú thích quan trọng 2. Hai con số b1 = -5 và b2 = -48, thật ra, là hai nghiệm số, đã đổi dấu, của phương trình đơn dản: $x^2 - 53x + 240$ (2). Ta có thể giải phương trình (2) này để có được hai nghiệm số: y1 = 5 và y2 = 48. Sau đó đem chia 2 con số này cho (a = 15) thì sẽ được 2 nghiệm số của phương trình gốc (1): x1 = 5/a = 5/15 = 1/3; và x2 = 48/a = 48/15 = 16/5.
Như vậy, việc phân tích thành thừa số và giải hai nhị thức là **không cần thiết**.

Chú thích 3. Phương pháp phân tích thừa số a*c hiện hữu sẽ được cải thiện, nếu ta áp dụng Qui Tắc về Dấu của Nghiệm Số trong phương trình bậc hai.

Nhớ lại: Qui Tắc về Dấu của hai nghiệm Số.

a. Nếu a và c khác dấu thì hai nghiệm số khác dấu.
   Thí dụ: Phương trình $7x^2 - 8x - 15 = 0$ có hai nghiệm số khác dấu: (-1) và (15/7)

b. Nếu a và c cùng dấu, thì hai nghiệm số cùng dấu. Hai trường hợp:

   1. Nếu a và b khác dấu, thì hai nghiệm số đều dương (+)
      Thí dụ: Phương trình $13x^2 - 21x + 8 = 0$ có hai nghiệm số dương: 1 và 8/13.

   2. Nếu a và b cùng dấu, thì hai nghiệm số đều âm (-).
      Thí dụ: Phương trình $13x^2 + 23x + 10 = 0$ có hai nghiệm số âm: (-1) và -10/13.

TÂN PHƯƠNG PHÁP a*c ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Phương pháp mới này của tác giả Nghi H Nguyên, phân biệt hai trường hợp:

TRƯỜNG HỢP 1 – GIẢI PHƯƠNG TRÌNH ĐƠN DẢN $x^2 + bx + c = 0$ (a = 1)

Bài toán là tìm hai số biết tổng số là (-b) và tích số là (c). Phương pháp này trực tiếp tìm 2 nghiệm số bằng cách liệt kê các cặp thừa số của **c** (factor pairs of c). Cặp thừa số nào có tổng số là (-b) sẽ cho đáp số. Nếu không tìm ra cặp như vậy, thì phương trình không thể phân ra thừa số được, và ta có thể phải xử dụng công thức bậc hai để giải.
Khi liệt kê các cặp thừa số, ta theo đúng Chỉ Dẫn sau đây:

CHỈ DẪN 1. Khi 2 nghiệm số khác dấu (a và c khác dấu), ta liệt kê (compose) các cặp thừa số của (c), với tất cả các con số đầu là số âm (-).

Thí dụ 8. Giải: $x^2 - 11x – 102 = 0$.

Bài giải. Hai nghiệm số khác dấu (a và c khác dấu). Ta liệt kê các cặp thừa số của (c = -102) với các số đầu tiên âm: (-1, 102)(-2, 51)(-3, 34)(-6, 17). Tổng số của cặp cuối là (17 – 6 = 11 = -b). Vậy hai nghiệm số là: -6 và 17. Ta không cần phải phân tích thừa số và giải 2 nhị thức.

CHỈ DẪN 2. Khi hai nghiệm số đều dương (a và c cùng dấu, a và b khác dấu), ta liệt kê các cặp thừa số của (c) với toàn số dương.

Thí dụ 9. Giải: $x^2 - 27x + 126 = 0$.

Bài giải. Hai nghiệm số đều dương. Liệt kê các cặp thừa số của (c = 126). Ta có: (1, 126)(2,63)(3, 42)(6, 21). Tổng số của cặp chót là (6 + 21 = 27 = -b). Vậy hai nghiệm số là: 6 và 21.

CHỈ DẪN 3. Khi hai nghiệm số đều âm (a và c cùng dấu, a và b khác dấu), ta liệt kê các cặp thừa số của (c) với toàn số âm.

Thí dụ 10. Giải: $x^2 + 31x + 108 = 0$.

Bài giải. Hai nghiệm số đều âm. Ta liệt kê các cập thừa số của (c = 108) với toàn số âm: (-1, -108)(-2, -54)(-3, -36)(-4, -27). Tổng số của cập chót là (-4 – 27 = -31 = -b). Vậy hai nghiệm số là: (-4) và (-27).

TRƯỜNG HỢP 2 – GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CĂN BẢN $ax^2 + bx + c = 0$ (1) (với $a \neq 1$)

Trong các trường hợp này, "Tân Phương Pháp a*c" biến đổi phương trình dạng căn bản (1) ra dạng đơn dản: $x^2 + bx + a*c = 0$ (2), với a = 1 và C = a*c.
Bài toán mới sẽ là: tìm 2 số biết tổng số là (-b) và tích số là (a*c). Như vậy, ta trở về cách giải như đã mô tả ở Trường Hợp 1.
Cách giải này sẽ làm cho việc phân tích ra thừa số và giải 2 nhị thức là **không cần thiết**.

Thí dụ 11. Giải: $8x^2 - 22x – 13 = 0$ (1). (a*c = 8*-13 = -108)

Bài giải. Biến đổi (1) ra phương trình dạng đơn dản: $x^2 - 22x – 108 = 0$ (2). Giải (2). Hai nghiệm số khác dấu. Liệt kê các cập thừa số: (-1, 108)(-2, 52)(-4, 26). Tổng số của cập chót là (26 – 4 = 22 = -b). Vậy 2 nghiệm số của (2) là: y1 = -4, và y2 = 26. Tiếp theo, chia hai số y1 và y2 cho (a = 8), ta được 2 nghiệm số của phương trình gốc (1) là: x1 = y1/a = -4/8 = -1/2; và x2 = y2/a = 26/8 = 13/4.

Thí dụ 12. Giải: $16x^2 - 55x + 21 = 0$ (1) (a*c = 16*21 = 336)

Bài giải. Biến đổi (1) ra: $x^2 - 55x + 336 = 0$ (2). Giải (2). Hai nghiệm số đều dương. Liệt kê các cập thừa số của (a*c = 336) với toàn số dương. Ta có: (1, 336)(2, 168)(4, 82)(6, 56)(7, 48). Tổng số của cập chót là (7 + 48 = 55 = -b). Vậy y1 = 7, và y2 = 48. Trở lại phương trình (1): x1 = 7/16, và x2 = 48/16 = 3.

Thí dụ 13. Giải: $24x^2 + 60x + 36 = 0$ (1) (a*c = 24*36 = 864)

Bài giải. Giải phương trình biến đổi: $x^2 + 60x + 864 = 0$ (2). Hai nghiệm số đều âm. Liệt kê các cập số của (a*c = 864) với toàn số âm. Nên liệt kê từ giữa chuỗi để tiết kiệm thời gian: …………… (-9, -96)(-12, -72)(-16, -54)(-18, -48)(-24, -36) OK. Hai nghiệm số của (2) là: y1 = -24, và y2 = -36. Vậy hai nghiệm số của (1) là: x1 = y1/a = -24/24 = -1, và y2 = -36/24 = -3/2.

Ghi chú. Phương trình này có dạng (a – b + c = 0), có thể giải tắt. Hai nghiệm số sẽ là: x1 = -1 và x2 = -c/a = -36/24 = -3/2. Học sinh cần học thêm cách giải tắt của phương trình bậc hai để tranh thủ thời gian.
Nếu (a + b + c = 0), thì x1 = 1 và x2 = c/a.

CHỨNG MINH TÂN PHƯƠNG PHÁP a*c.

Giải phương trình căn bản: $ax^2 + bx + c = 0$ bằng công thức, ta có 2 nghiệm số:

$x = -b/2a \pm d/2a$ **(P)** (với $d^2 = b^2 - 4a*c = b^2 - 4C$, vì $C = a*c$)

Giải phương trình đơn dản: $x^2 + bx + C = 0$, với a = 1, bằng công thức, ta có 2 nghiệm số

$y = -b/2 \pm d/2$ **(Q)** (với $d^2 = b^2 - 4C$)

So sánh hai đẳng thức (P) và (Q), với cùng một giá trị của d, ta có: $y = ax \rightarrow$ **$x = y/a$**.

PHƯƠNG PHÁP TỐT NHẤT ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI.
(Best method to solve quadratic equations)
Hiện nay có tất cả 8 cách giải phương trình bậc hai: đồ thị (graphing), hoàn chỉnh bình phương (completing the squares), phân tích ra thừa số theo FOIL (FOIL factoring method), công thức bậc hai (quadratic formula), phương pháp Tổng Chéo (The Diagonal Sum Method), phương pháp Bluma (Bluma method), phương pháp a*c phân tích ra thừa số (factoring a*c method), và mới nhất là Tân Phương Pháp a*c. Phương pháp này cũng còn được gọi là Phương Pháp Biến Đổi (Transforming Method). Vì vậy học sinh nhiều khi lúng túng không biết chọn phương pháp nào là tốt nhất.
Sau đây là **Lời Khuyên** về cách lựa chọn

Để giải một phương trình bậc hai, ta cần phân biệt hai trường hợp

1. Nếu phương trình không thể phân tích ra nhị thức (can't be factored), thì dùng công thức bậc hai là tốt nhất.
   Câu hỏi: làm sao biết là phương trình có thể phân tích ra nhị thức?
   Trả lời: Có hai cách.

   CÁCH 1. Tính hạng số $D = d^2 = b^2 - 4ac$. Nếu d là một số tròn (whole number), thì phương trình có thể phân tích ra nhị thức.
   CÁCH 2. Giải phương trình bằng "Tân Phương Pháp a*c" qua việc liệt kê (compose) các cập thừa số của a*c (hoặc của c khi a = 1). Nếu ta không tìm được cập nào có tổng số là (-b), hoặc b, thì phương trình không thể phân tích ra nhị thức, và ta có thể phải dùng công thức bậc hai.

2. Nếu phương trình có thể phân tích ra nhị thức thì chọn "Tân Phương Pháp a*c" là cách giải đơn dản và mau nhất.
   Các ưu điểm của phương pháp này là: đơn dản, mau chóng, có phương cách (systematic), không đoán mò (no guessing), không cần phân tích ra thừa số, và không cần giải nhị thức.

   (Bài này được viết do Nghi H Nguyen, tác giả của: "The New AC Method to solve quadratic equations". – Feb 06, 2015 – Có thể truy tìm bài viết trên Google, Yahoo, hay Bing Search)